

NUME:

PRENUME:

Anexa_L

1. Dreapta lui Gauss: Fie $ABCD$ un patrulater convex, $AD \cap BC = \{E\}$, $AB \cap DC = \{F\}$.

Atunci mijloacele M, N, P ale segmentelor (AC) , (BD) , (EF) sunt puncte coliniare.

Demonstratie:

Notand $\frac{AF}{AB} = p$, $\frac{AE}{AD} = q$,

$\overline{AD} = \vec{v}$, $\overline{AB} = \vec{u}$ avem $\overline{AF} = p\vec{u}$, $\overline{AE} = q\vec{v}$,

$\overline{AN} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$, $\overline{AP} = \frac{1}{2}(p\vec{u} + q\vec{v})$.

Notand $\frac{CF}{CD} = r$, $\frac{CB}{CE} = t$, avem

$\overline{AC} = \frac{p\vec{u} + r\vec{v}}{1+r} = \frac{\vec{u} + tq\vec{v}}{1+t}$ si rezulta

$\frac{p}{1+r} = \frac{1}{1+t}$, $\frac{r}{1+r} = \frac{tq}{1+t}$. Obtinem $t = \frac{r}{pq}$ si $r = \frac{q(p-1)}{q-1}$. Inlocuind in $\overline{AC} = 2\overline{AM}$, obtinem

$\overline{AM} = \frac{1}{2(pq-1)} [p(q-1)\vec{u} + q(p-1)\vec{v}]$. Din $\overline{NP} = \overline{NA} + \overline{AP} = \frac{1}{2} [(p-1)\vec{u} + q(p-1)\vec{v}]$ rezulta

$\overline{MP} = \overline{MA} + \overline{AP} = \frac{pq}{2(pq-1)} [(p-1)\vec{u} + (q-1)\vec{v}] = \frac{pq}{2(pq-1)} \overline{NP}$; prin urmare, punctele M, N, P sunt

coliniare.

2. Inegalitatea lui Jensen: Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o functie si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Functia este convexa pe $[a, b]$ daca si numai daca, oricare ar fi punctele $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ si oricare ar fi numerele

$t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, are loc inegalitatea $f(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ (1)

Demonstratie: Demonstram, mai intai, ca, daca $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ cu $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ si $\sum_{i=1}^n t_i = 1$,

atunci $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in [a, b]$. Avem $a \leq x_1 \leq b$, $a \leq x_2 \leq b$, ..., $a \leq x_n \leq b$. Inmultind inegalitatile

respective cu numerele t_1, t_2, \dots, t_n si adunadu-le, obtinem:

$a(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n \leq b(t_1 + t_2 + \dots + t_n)$. Cum $\sum_{i=1}^n t_i = 1 \Rightarrow a \leq \sum_{i=1}^n t_i x_i \leq b$.

Demonstram necesitatea prin inductie; fie f convexa. Daca $n=1$, inegalitatea (1) este evidenta. Presupunem inegalitatea adevarata pentru n si demonstram ca este adevarata si pentru $n+1$.

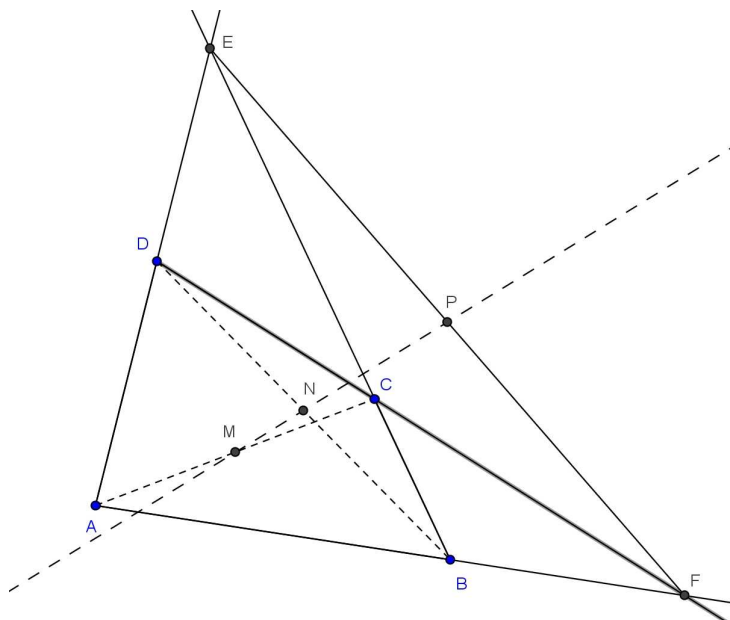
Luam $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in [a, b]$ si numerele $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} \in [0, 1]$, astfel incat $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$. Vom

demonstra ca $f(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)$ (2). Conform ipotezei de inductie, avem

$f(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i) = f(\sum_{i=1}^n t_i x_i + (t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1})) \leq t_1 f(x_1) + \dots + t_{n-1} f(x_{n-1}) +$

$+(t_n + t_{n+1})f(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} \cdot x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} \cdot x_{n+1})$ (3) deoarece $t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1} =$

$=(t_n + t_{n+1}) \left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} \cdot x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} \cdot x_{n+1} \right)$. Datorita convexitatii lui f , avem



NUME:

PRENUME:

$f\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} \cdot x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} \cdot x_{n+1}\right) \leq \frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} f(x_n) + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} f(x_{n+1})$ si, inlocuind in (3), obtinem inegalitatea (2). Suficienta este evidenta.

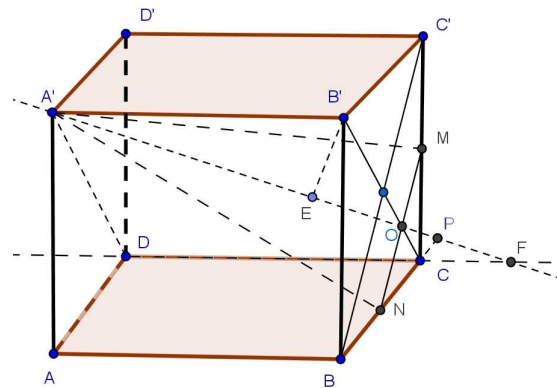
3. Distanțe și unghiuri în spațiu. In cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a se notează cu M și N mijloacele muchiilor $[CC']$, respectiv $[BC]$. Calculați $d(C; (A'MN))$ și $d(B'; (A'MN))$.

Demonstratie: Notăm $B'C \cap MN = \{O\}$.

Aratăm că planul $(A'MN)$ și planul $(A'B'C)$ sunt perpendiculare.

$$\left. \begin{array}{l} A'B' \perp (BCC'B') \\ MN \subset (BCC'B') \end{array} \right\} \Rightarrow A'B' \perp MN \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} B'C \perp BC' \\ BC' \parallel MN \end{array} \right\} \Rightarrow B'C \perp MN \quad (2)$$



Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} MN \perp (A'B'C) \\ (MN) \subset (A'MN) \end{array} \right\} \Rightarrow (A'MN) \perp (A'B'C)$ și $(A'MN) \cap (A'B'C) = A'O$.

În aceste condiții, orice dreaptă perpendiculară pe $A'O$ situată în unul din cele două plane va fi perpendiculară pe celălalt. În triunghiul $A'B'O$ dreptunghic în B' ducem

$$B'E \perp A'O \Rightarrow B'E \perp (A'MN) \Rightarrow d(B'; (A'MN)) = B'E = \frac{A'B' \cdot B'O}{A'O} \Rightarrow$$

$$B'E = \frac{a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4}}{a \cdot \frac{\sqrt{34}}{4}} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{a\sqrt{34}} = \frac{3a}{\sqrt{17}}. \text{ Determinăm } d(C; (A'MN)). \text{ Notăm } A'O \cap CD = \{F\}.$$

Triunghiul $A'DF$ este dreptunghic în D și ducem $CP \perp A'F$. Atunci $d(C; (A'MN)) = CP$. Din asemănarea triunghiurilor ADF și CPF avem $\frac{CP}{A'D} = \frac{CF}{A'F}$. Mai departe, $\frac{CO}{A'D} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\frac{CF}{CF + a} = \frac{1}{4} \Rightarrow CF = \frac{a}{3} \text{ și deci } \frac{CP}{a\sqrt{2}} = \frac{\frac{a}{3}}{a\sqrt{34}} \Rightarrow CP = \frac{a}{\sqrt{17}}.$$

4. Ecuație logaritmică: Sa se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\log_2(2x^2 + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 2}$.

Demonstratie: Se verifică că $x=0$ este soluție a ecuației. Cum $2x^2 + \sqrt{2} \geq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$, avem

$$\log_2(2x^2 + \sqrt{x}) \geq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Vom arăta că } \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 2} \geq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Avem echivalent}$$

$$2\sqrt{x^2 + 1} \leq x^2 + 2 \text{ sau } 4x^2 + 4 \leq x^4 + 4x^2 + 4, \text{ adică } 0 \leq x^4, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Am arătat că}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \leq \log_2(2x^2 + 2), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Atunci ecuația dată este echivalentă cu sistemul:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \\ \log_2(2x^2 + \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \end{array} \right. \text{ și obținem } x=0 \text{ unică soluție.}$$