

NUME:

PRENUME:

Anexa_G

1. Teorema lui Stewart. *Daca M este un punct pe latura [BC] a unui triunghi ABC, atunci are loc relatia $AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot BM \cdot CM$.*

Demonstratie: Fie L proiectia punctului A pe BC. Aplicam teorema lui Pitagora generalizata in triunghiurile ACM si AMB.

Obtinem: $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \cdot ML \mid \cdot BM$

si $AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \cdot ML \mid \cdot MC$.

Daca inmultim cele doua egalitati, prima cu BM, iar a doua cu MC si le adunam membru cu membru, se va reduce termenul

$2 \cdot MC \cdot BM \cdot ML$ si obtinem: $AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC =$

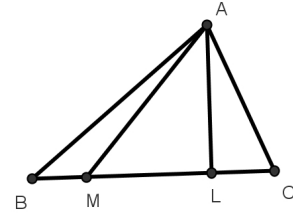
$AM^2 \cdot BM + MC^2 \cdot BM + AM^2 \cdot MC + MB^2 \cdot MC \Leftrightarrow$

$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2 \cdot (MB + MC) + MC^2 \cdot MB + MB^2 \cdot MC \Leftrightarrow$

$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2 \cdot BC + MC \cdot BM \cdot (MC + MB) \Leftrightarrow$

$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2 \cdot BC + MC \cdot BM \cdot BC \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM + BC \cdot BM \cdot MC$, adica obtinem relatia de demonstrat.



2. Multimi. *Se dau multimile*

$$A = \{x \mid x = 3n - 2, n \in \mathbb{N}\}, B = \{x \mid x = 1003 - 2m, m \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{x \mid x = 6p + 1, p \in \mathbb{Z}, 0 \leq p \leq 166\}.$$

Sa se atrate ca $A \cap B = C$.

Demonstratie: Avem de demonstrat ca $A \cap B \subset C$ si $C \subset A \cap B$. Fie $x \in A \cap B$ si aratam ca $x \in C$. Din $x \in A \cap B$ rezulta $x \in A$ si $x \in B$, adica exista numerele naturale m si n astfel

incat $x = 3n - 2 = 1003 - 2m$. Din $3n - 2 = 1003 - 2m$ obtinem $m = \frac{1005 - 3n}{2}$ sau

$m = 503 - n - \frac{n-1}{2}$. Fiindca m si n sunt naturale, rezulta ca $\frac{n-1}{2}$ trebuie sa fie intreg si il

notam, deci, cu p . Deci, $\frac{n-1}{2} = p \Rightarrow n = 2p + 1$ si $m = 502 - 2p - 1 - p = 501 - 3p$.

Numerele m si n fiind naturale, avem $2p + 1 \geq 1$ si $501 - 3p \geq 1$, adica $0 \leq p \leq 166$, iar

$x = 3n - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 6p + 1$. Deci, $x \in C$.

Fie acum $x \in C$. Sa aratam ca $x \in A \cap B$. Daca $x \in C$, atunci exista numarul intreg p , cu $0 \leq p \leq 166$, astfel ca $x = 6p + 1$. Sa aratam ca x poate fi scris sub forma $3n - 2$ cu $n \in \mathbb{N}$.

Avem $x = 6p + 1 = 6p + 1 + 2 - 2 = 6p + 3 - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 3n - 2$.

(Am notat $n = 2p + 1$). Obtinem astfel ca $x \in A$. Sa aratam ca $x \in B$.

$x = 6p + 1 = 6p + 1 + 1003 - 1003 = 6p - 1002 + 1003 = 1003 - 2(501 - 3p) = 1003 - 2m$

(am notat $501 - 3p = m, m \in \mathbb{Z}, m > 0$). $m = 501 - 3p = 3 + (498 - 3p) = 3 + 3(166 - p) \geq 3$.

Atunci $x \in B$. Deci, $x \in A$ si $x \in B$; rezulta $x \in A \cap B$. Din $A \cap B \subset C$ si $C \subset A \cap B$ rezulta egalitatea ceruta.

NUME:

PRENUME:

3. Inegalitati: Sa se arate ca, daca $x \in [1,4]$ si $1 + y = x$, atunci sunt adevarate afirmatiile:

- (1) $\sqrt{x^2 + y^2} \in [1,5]$; (2) $\sqrt{x^2 - y^2} \in [1, \sqrt{7}]$; (3) $x \cdot y \in [0;12]$;
(4) $\sqrt{x^3 - y^3} \in [1, \sqrt{37}]$; (5) $\sqrt{x^4 - y^4} \in [1, 5\sqrt{5}]$.

Demonstratie:

(1) din $1 + y = x$ deducem ca $y = x - 1$. Cum $1 \leq x \leq 4$, avem $0 \leq y \leq 3 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 16$ si $0 \leq y^2 \leq 6 \Rightarrow 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5$.

(2) $x^2 - y^2 = x^2 - (x - 1)^2 = 2x - 1$; $1 \leq x \leq 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8 \mid -1 \Leftrightarrow 1 \leq 2x - 1 \leq 7$, deci $1 \leq \sqrt{2x - 1} \leq \sqrt{7}$

(3) Din $1 \leq x \leq 4$ si $0 \leq y \leq 3$, prin inmultire, rezulta cerinta.

(4) din $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ si

$x - y = 1$ avem $x^3 - y^3 = x^2 + xy + y^2 = (x^2 + y^2) + xy \in [0 + 1; 12 + 25] = [1; 37]$.

(5) $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ si se valorifica rezultatele de la (1) si (2).

4. **Sectiuni in corpuri geometrice:** Intr-un trunchi de piramida triunghiulara se duce un plan, continand o latura a bazei mici, paralel cu muchia laterala opusa. Sa se determine raportul volumelor poliedrelor obtinute, stiind ca raportul bazelor este $\frac{1}{2}$.

Demonstratie:

Notam $ABC_1A_1B_1C_1$ trunchiul de piramida triunghiulara. Deoarece $CC_1 \subset (BCC_1)$, planul de sectiune va intersecta planul (BCC_1) dupa o dreapta B_1D paralela cu CC_1 . Analog, dreapta CC_1 este si in planul (ACC_1) . Planul de sectiune va intersecta si acest plan dupa dreapta $A_1E \parallel C_1C$. Sectiunea cautata este paralelogramul EDB_1A_1 ($B_1D \parallel CC_1 \parallel A_1E$ si

$ED \parallel A_1B_1$). Volumul trunchiului de piramida

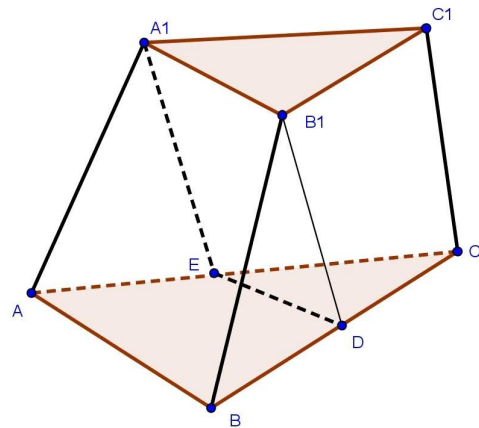
este: $V = \frac{h}{3}(S + D + \sqrt{S \cdot D})$, unde D este aria bazei

mici. Stim ca $\frac{D}{S} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. De aici rezulta $S = 4D$ si $V = \frac{5Dh}{3}$.

Notam V_1 volumul poliedrului cu baza CED si V_2 volumul poliedrului cu baza $ABDE$.

Avem $V_1 = D \cdot h$, caci $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle CED$ si $V_2 = V - V_1 = \frac{4Dh}{3}$. De aici rezulta

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4Dh}{3}}{Dh} = \frac{4}{3}.$$



NUME:

PRENUME: